УДК 37.012
ББК Ч4в ГРНТИ 27.43.51 Код ВАК 5.8.1

Фролов Александр Александрович,
SPIN-код: 1006-6826
доктор физико-математических наук профессор, учитель физики, МКОУ АМО «Заринская СОШ»; 623240, Россия, Свердловская обл., Ачитский р-н, п. Заря, ул. Советская, 20; e-mail: frolov_aa@list.ru

Гейн Александр Георгиевич,
SPIN-код: 8375-8737
доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и фундаментальной информатики, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина; 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19; e-mail: a.g.geyn@urfu.ru

Багно Александр Леонидович,
SPIN-код: 4997-3622
научный сотрудник Отдела динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук; 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Черняев Игорь Анатольевич,
SPIN-код: 3988-9353
старший преподаватель кафедры общественного здоровья и здравоохранения, Уральский государственный медицинский университет; 620028, Россия, г. Екатеринбург, ул. Репина, 3; e-mail: obltuborg@yandex.ru

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ СТАТИСТИЧЕСКИХ АНСАМБЛЕЙ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аппроксимация; детерминистский закон; диаграммы; ограниченные бесконечные множества; дисперсия значений величин; статистический ансамбль; математическое моделирование; множественный подход; обработка результатов; экспериментальные исследования

АННОТАЦИЯ. Предложен новый теоретико-множественный подход к обработке результатов исследований статистических ансамблей, альтернативный, но не антагонистичный статистическому подходу Введено определение диаграммы как визуализированного непрерывного отображения числового множества результатов измерений значений величины на ограниченное поле элементов евклидова пространства мерностью не более 3. Авторы исходили из предположения, что диаграммное представление множеств допустимо и целесообразно при математической обработке результатов наблюдений при соблюдении ряда условий, которые были сформулированы в виде четырех теорем, доказательство которых приводится в настоящей работе. Аппроксимация границ поля диаграммы аналитической функцией, отображающей модельное представление наблюдаемого явления, позволяет установить вид детерминистского закона развития процесса в его формульном представлении. Возможности предлагаемого подхода проиллюстрированы примерами из физического, образовательно-психологического и эпидемиологического экспериментальных исследований систем, описываемых статистическими ансамблями. Математически обоснован теоретико-множественный подход к обработке результатов экспериментального исследования систем, описываемых статистическими ансамблями. Подход допускает установление в аналитической форме закона как формализованного модельного представления причинно-следственной связи между измеряемыми величинами вне зависимости от разброса значений этих величин и вида обусловленных разбросом распределений. Данный подход не противоречит применимости традиционной статистической обработки результатов наблюдений.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Фролов, А. А. Теоретико-множественный подход к обработке результатов исследований статистических ансамблей / А. А. Фролов, А. Г. Гейн, А. Л. Багно, И. А. Черняев. – Текст : непосредственный // Педагогическое образование в России. – 2025. – № 2. – С. 67–73.

Frolov Alexander Alexandrovich,
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Teacher of Physics, Zarinskaya Secondary School, Zarya settlement, Sverdlovsk region, Russia

Geyn Aleksander Georgievich,
Doctor of Pedagogy, Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Algebra and Fundamental Computer Science, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

Bagno Alexander Leonidovich,
Research Fellow of Department of Dynamic Systems, N. N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russia

Cherniaev Igor Anatolievich,
Senior Lecturer of Department of Public Health and Healthcare, Ural State Medical University, Ekaterinburg, Russia

A SET-THEORETIC APPROACH TO THE PROCESSING OF THE RESULTS OF STATISTICAL ENSEMBLE STUDIES

KEYWORDS: approximation; deterministic law; diagrams; bounded infinite sets; dispersion of values of quantities; statistical ensemble; mathematical modeling; multiple approach; processing of results; experimental research

ABSTRACT. A new set-theoretic approach to the processing of research results of statistical ensembles has been proposed as an alternative, but not antagonistic, to the statistical approach. The definition of a diagram as a visualised continuous representation of a numerical set of measurement results of magnitude values on a limited field of elements of Euclidean space with a dimension of not more than 3 was proposed. The authors proceeded from the assumption that the diagrammatic representation of sets is acceptable and advisable in the mathematical processing of observational results, subject to a number of conditions formulated in the form of four theorems, the proof of which is given in this paper. The approximation of the boundaries of the diagram field by an analytical function, which is a model representation of the observed phenomenon, allowed establishing the type of deterministic law of process development in its formula representation. The possibilities of the proposed approach were illustrated by examples from physical, educational, psychological and epidemiological experimental studies of systems described by statistical ensembles. A set-theoretic approach to processing the results of an experimental study of systems described by statistical ensembles was mathematically justified. The approach allowed the establishment of a law in analytical form as a formalized model representation of the causal relationship between measured quantities, independent of the spread of values of these quantities and the nature of the distributions caused by the spread. This approach did not contradict the applicability of traditional statistical processing of observational results.

FOR CITATION: Frolov, A. A., Geyn, A. G., Bagno, A. L., Cherniaev, I. A. (2025). A Set-theoretic Approach to the Processing of the Results of Statistical Ensemble Studies. In *Pedagogical Education in Russia*. No. 2, pp. 67–73.

Статистическим ансамблем называется сколь угодно большое число совокупностей значений величин, характеризующих «микроскопические» состояния систем объектов, находящихся в одинаковых макроскопических состояниях [10; 15]. При этом микроскопические состояния системы могут принимать все возможные значения, совместимые с заданными значениями макроскопических параметров, определяющих ее макроскопическое состояние. Данное представление позволяет установить связь между проявляющимися в ходе экспериментальных исследований строго детерминированными макроскопическими состояниями систем и принципиально вероятностным поведением составляющих их элементов. Можно предположить методологическую общность такого подхода для многих экспериментально исследуемых систем – при проведении физических, психологических, педагогических, эпидемиологических и других исследований. Задачей предлагаемой статьи является математическая формализация подхода, позволяющая строго реализовать его в практике экспериментальных исследований.

При экспериментальном исследовании состояний систем, описываемых статистическими ансамблями, имеется некоторая последовательность множеств As, где s – параметр, отражающий получение статистических результатов в некоторый момент эксперимента. Это может быть физическая величина, характеризующая причину наблюдаемого явления, число предъявлений заданий в педагогике или психологии, эффективная удаленность от центра медицинского обслуживания [3; 5, с. 99; 9; 13; 14]. Каждое As – это множество результатов, полученных при данном значении s. Множество A = ∪ As может представлять собой поле элементов определенного пространства. Из физического смысла параметр s неотрицателен. Каждый элемент из A – это одномерная (скалярная) или многомерная (векторная) величина. Практика экспериментальных исследований указывает на возможность ограничения поля величины двумя непрерывными, скорее всего – аналитическими функциями f(s) и g(s), для которых при любом s отклонения f(s) от sup As и g(s) от inf As были бы минимальными.

Для рассмотрения такой возможности введем определение диаграммы как визуализированного непрерывного отображения заданного множества на ограниченное поле элементов евклидова пространства мерностью не более 3. Очевидно, что должны выполняться определенные условия, допускающие диаграммное представление множеств, а также делающие это представление целесообразным при математической обработке результатов наблюдений. Поскольку эти условия должны носить четкий характер, их следует сформулировать в виде теорем.

Теорема 1. ***Любое ограниченное, в том числе – с бесконечной мерой, множество может быть представлено диаграммой, если границы подмножеств этого множества образуют плотное множество.***

Доказательство. Пусть A – ограниченное подмножество вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, граница которого образует плотное множество. То есть для границы множества A справедливо утверждение: при любом значении числа $\varepsilon > 0$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ найдется такая точка y из ε-окрестности точки x, что $y \in A$.

По определению диаграмма – это непрерывная биекция подмножества вещественного пространства в подмножество евклидова пространства. Так как она непрерывна, образ точки y будет лежать в δ-окрестности образа точки x. Отсюда следует, что образ множества A плотен в евклидовом пространстве. Теорема доказана.

Теорема 2. ***Бесконечное множество может быть представлено диаграммой, если оно содержит ограниченные бесконечные подмножества, границы которых образуют плотные множества.***

Доказательство. Рассмотрим пространство, содержащее как минимум одно ограниченное бесконечное подмножество A, граница которого образует плотное множество. Введем на этом пространстве систему координат таким образом, чтобы ее начало не лежало в A.

Для каждой точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ сделаем замену переменных $y_i = \frac{1}{x_i}$, где i изменяется от 1 до n. Тогда множество $Y = \left\{y = (y_1, \dots y_n) = \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) : x = (x_1, \dots, x_n) \in A\right\}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы 1, т. е. оно может быть представлено диаграммой. Теорема доказана.

Вид границ раздела полей диаграммы определяется функциями, отображающими модельные представления субъекта исследования о смысле изучаемого процесса. При этом модельные представления субъекта являются первичными по отношению к аппроксимации конкретных границ определенной функцией – функция выбирается для готовой в принципе модели, а не наоборот. Законом называется формализованное модельное представление необходимой, существенной, устойчивой и воспроизводимой причинно-следственной связи между явлениями изучаемого процесса [12, с. 98]. Детерминистскими называются законы, представляемые аналитическими функциями, допускающими разложение в степенной ряд в окрестности точки. Для решения задач на основании детерминистских законов имеется в виду формульное представление соответствующих функциональных зависимостей. Таким образом, согласно определению детерминистского закона, выбираемая для аппроксимации границ раздела полей диаграммы функция должна быть формульно представленной аналитической.

Теорема 3. ***Отображение плотного множества B, соответствующего границе ограниченного бесконечного множества A, задающее границы полей диаграммы, является аналитической функцией на заданном условиями исследования интервале области ее определения.***

Доказательство. Пусть A – множество, задающее диаграмму. Возьмем n точек $a_n \in A$ и рассмотрим семейство многочленов $\{P_{n+1}\}$ степени $n + 1$, проходящих через каждую из точек a_n.

Введем меру близости многочлена P_{n+1} к точкам плотного множества B, соответствующего границе множества A: $M = \int \left(P_{n+1}(x_{a_n}) - x_{a_n}\right) e^{-x_{a_n}{}^2} dx$, чтобы можно было найти многочлен, на котором достигается супремум оператора M.

Описанный алгоритм мы можем выполнить для любого $n \geq 2$.

По теореме Вейрштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами непрерывную на отрезке функцию можно равномерно на этом отрезке приблизить многочленом с наперед заданной точностью. Таким образом, мы можем выбрать любую непрерывную функцию, и она будет приближаться с заданной точностью (ограниченной лишь мощностью множества B) последовательностью многочленов $\{P_{n+1}\}$, построенной по описанному алгоритму. Теорема доказана.

Необходимо отметить еще одно важное обстоятельство. С одной стороны, оно обусловлено единством природы как изучаемого явления при различных его рассмотрениях, так и процессов, выделяемых из него для рассмотрения. С другой – подмножества, границы которых образуют плотные множества, имеют одно и то же характеристическое свойство, которым обладают и их граничные элементы, образующие плотные подмножества. Следовательно, эти подмножества аппроксимируются одной и той же аналитической функцией, отображающей каждое из них на поле диаграммы.

Теорема 4. ***Границы конкретного поля диаграммы аппроксимируются одной и той же функцией, отличающейся для разных границ лишь значениями параметров.***

Доказательство. По теореме 3 поле диаграммы можно аппроксимировать аналитической функцией. Такое приближение не единственно. Существует счетное множество различных наборов параметров функции, при которых она будет аппроксимировать поле диаграммы. Возьмем два из них, и это будут аппроксимации верхней и нижней границ диаграммы. Теорема доказана.

Проведенное рассмотрение может быть проиллюстрировано следующими типичными примерами из практики исследований. В ходе исследования процесса роста кристаллов интерметаллидов из расплава были получены результаты измерений зависимости огранения боковой поверхности кристаллов от скорости выращивания [11]. При совместном обсуждении этих результатов автор современной теории роста кристаллов из расплава В. В. Воронков [2] отметил диаграммный характер зависимости.

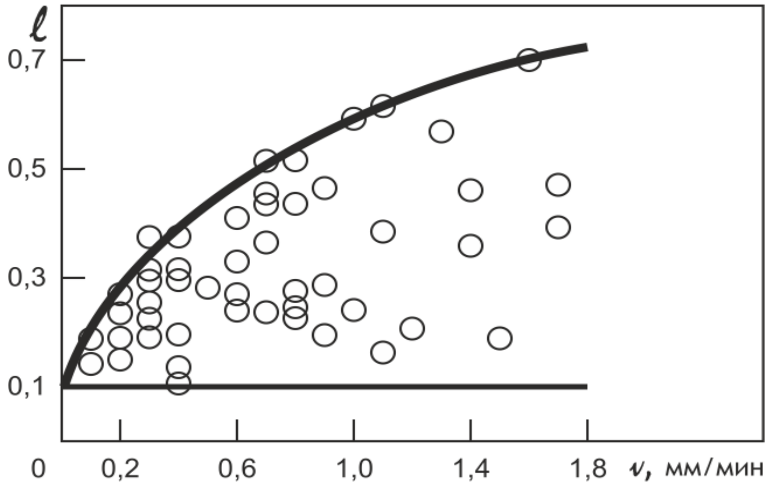

Рис. 1. Зависимость относительной ширины грани, l, от скорости роста, v, кристаллов $FeGe_2$ из расплава. Аппроксимации: верхняя ветвь $l_1 = A + B v^{1/n-1/3}$; нижняя ветвь $l_2 = l_{min} = const$, [11]

Аппроксимация верхней границы диаграммы степенной функцией позволила установить новый закон послойного роста кристалла из расплава на ступенях с малым числом изломов [11]. В соответствии с теоремой 4 нижняя граница этой диаграммы аппроксимируется прямой, параллельной оси абсцисс и отображающей вырожденный случай степенной функции. Эта ветвь также имеет физический смысл в соответствии с работами [10; 11]. В рассмотренном примере разброс результатов измерений не связан с их проведением, а имеет глубокие реально физические причины, подлежащие выяснению в процессе обработки этих результатов. В связи с этим имеет смысл рассмотрение всей совокупности результатов, представленной на рисунке 1, как статистического ансамбля.

Проведение психолого-педагогического исследования обучаемости учителей и учащихся введению определений понятий [12] также привело к диаграммному представлению зависимости времени, затрачиваемого обучающимся для введения определения понятия, от числа последовательно предлагаемых денотатов.

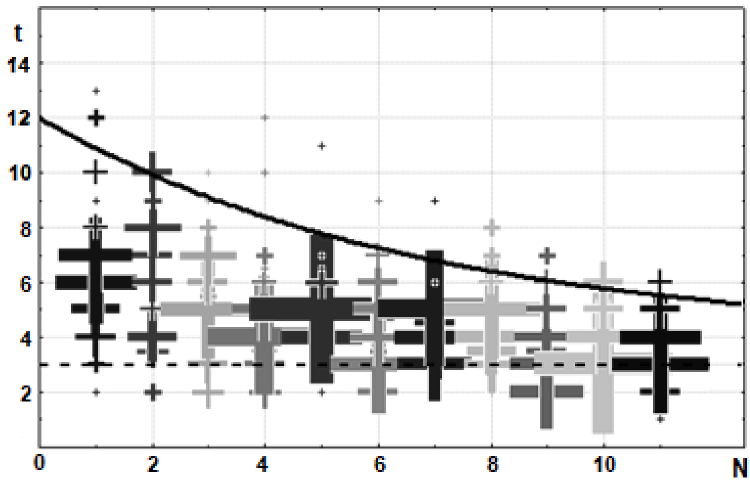

Рис. 2. Зависимость времени введения определения понятия, t, в процессе обучения от числа предъявления понятий, N. Аппроксимации: верхняя ветвь $B_1 = 6+18(1-e^{-2N})$; нижняя ветвь $B_2 = 6+6(1-e^{-0,18N})$, [12]

Данные на рисунке 2 представляют собой массив результатов измерений с учетом статистических весов полученных значений. В качестве аппроксимирующей верхнюю ветвь аналитической функции была выбрана экспоненциальная функция ввиду явно вероятностного характера значений, полученных различными обучающимися для данного предъявления денотата. И в этом случае нижняя граница диаграммы находится в соответствии с теоремой 4. В итоге был установлен детерминистский закон обучаемости алгоритмизированному подходу к введению определений понятий [12].

Установление такого закона допускает, в частности, компьютеризированный мониторинг образовательного состояния групп и отдельных обучающихся при реализации данного подхода. Численные значения коэффициента в показателе экспоненты для ветви B_1 позволяют характеризовать и сравнивать обучаемость групп как учащихся, так и учителей введению определений понятий.

Предложенная в ходе проведения данного исследования система оценки качества введения определения понятия [12] позволила получить зависимость, представленную на рисунке 3.

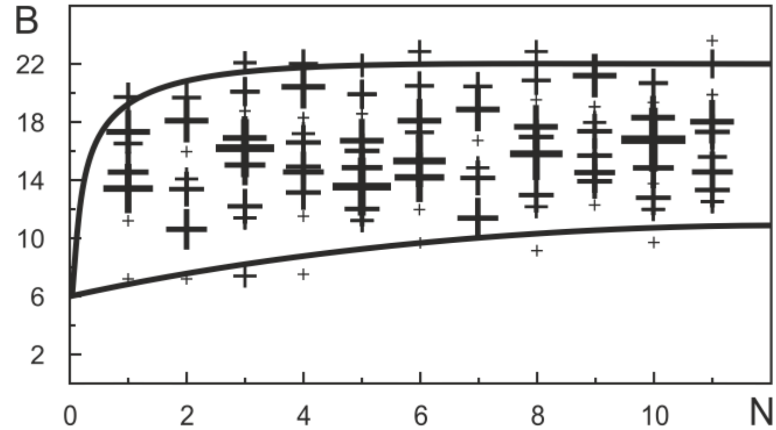

Рис. 3. Зависимость качества введения определения понятия, B, от числа предъявлений понятий, N. Аппроксимации: верхняя ветвь $B_1 = 6+18(1-e^{-2N})$; нижняя ветвь $B_2 = 6+6(1-e^{-0,18N})$, [12]

В приведенных примерах экспериментальная ситуация строго соответствует определению статистического ансамбля. Так, все поле результатов измерений, изображенное на рисунках 2 и 3, отражает макроскопическое состояние определенной группы испытуемых (например, учителей), в то время как состояния отдельных испытуемых принимают различные значения в пределах этого поля. К тому же, что важно отметить, поля состояний однородных групп (например, учащихся определенных классов при прочих равных условиях) не просто сходны, но и порой неотличимы. Это, по-видимому, можно рассматривать как «копии» одной и той же системы, находящиеся в одинаковых макроскопических состояниях.

Можно предположить, что допустим такой же подход к рассмотрению причин и следствий поведения систем, представляющих определенные группы людей при медико-статистических исследованиях. Это предположение основано в том числе на существующей практике попыток использования приемов визуализации результатов таких исследований [1; 4; 6; 8], что еще раз указывает на необходимость формирования достаточно строгих подходов к обработке подобного рода данных.

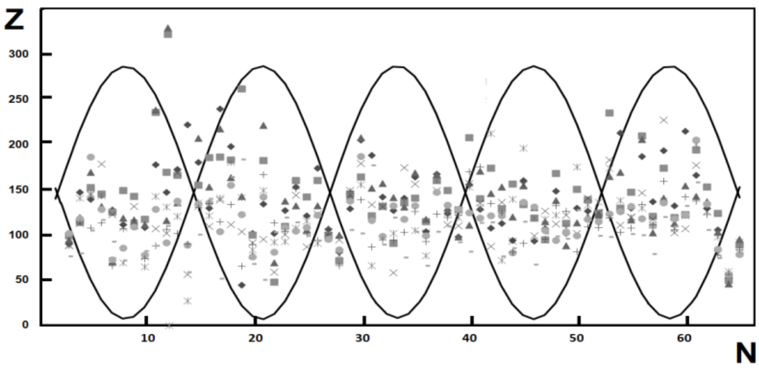

Рис. 4. Распределение территорий региона по уровню заболеваемости туберкулезом на 100 тыс. населения (ось Z); по оси N – порядковые номера муниципальных образований согласно применяемой в [13] последовательности

В результате была получена диаграмма (рис. 4), позволяющая анализировать в указанном интервале времени (2010–2023 гг.) графическое представление массива результатов измерений как для каждого муниципалитета, так и для изучаемой эпидемиологической ситуации в масштабе Свердловской области РФ в целом. Достаточно очевидная периодичность распределения результатов измерений в поле диаграммы указывает на возможность аппроксимации ее границ аналитической функцией синусоидального вида $\mathbf{Z_1}$ = a-b*sin(c*x+d), $\mathbf{Z_2}$ = a+b*sin(c*x+d). В результате такой аппроксимации становится возможным обсуждение наличия стоячей волны заболеваемости туберкулезом в пределах Свердловской области. Основанный на этом обстоятельстве последующий статистический анализ данных [7] показал, что в муниципальных образованиях, соответствующих узлам стоячей волны (рис. 4), показатель заболеваемости имел наименьшую амплитуду зарегистрированных значений, а в областях пучностей – наибольшую по сравнению с другими территориями. Выделение вышеуказанных муниципалитетов в отдельные подгруппы для углубленного изучения эпидемиологической ситуации способствовало установлению закономерностей изменения величины показателя заболеваемости туберкулезом в масштабах региона в изучаемый период времени [13; 14].

Приведенные в статье результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Предложен новый теоретико-множественный подход к обработке результатов исследований статистических ансамблей, альтернативный, но не антагонистичный статистическому подходу.
2. Введено определение диаграммы как визуализированного непрерывного отображения числового множества результатов измерений значений величины на ограниченное поле элементов евклидова пространства мерностью не более 3.
3. Аппроксимация границ поля диаграммы аналитической функцией, отображающей модельное представление наблюдаемого явления, позволяет установить вид детерминистского закона развития процесса в его формульном представлении.
4. Возможности предлагаемого подхода проиллюстрированы примерами из физического, образовательно-психологического и эпидемиологического экспериментальных исследований систем, описываемых статистическими ансамблями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бароян, О. В. Математика и эпидемиология / О. В. Бароян, Л. А. Рвачев. – М. : Знание, 1977. – 64 с. – URL: https://www.mathedu.ru/text/baroyan_rvachev_matematika_i_epidemiologiya_1977/p28/ (дата обращения: 22.11.2022).

2. Воронков, В. В. Теория роста кристаллов из расплава: послойный механизм и формообразование : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.18 / В. В. Воронков. – М., 1982. – 363 с.

3. Гудименко, А. И. Тепловой поток в одномерной полубесконечной гармонической решетке с поглощающей границей / А. И. Гудименко // Дальневосточный математический журнал. – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 38–51. – DOI: 10.47910/FEMJ202004.

4. Емельянова, Ю. Г. Методы когнитивно-графического представления информации для эффективного мониторинга сложных технических систем / Ю. Г. Емельянова, В. П. Фраленко // Программные системы: теория и приложения. – 2018. – Т. 9, № 4 (39). – С. 117–158. – DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-4-3-117-158.

5. Ефимов, И. Н. Компьютерное моделирование динамических систем / И. Н. Ефимов, Е. А. Морозов, К. М. Селиванов. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014. – 134 с.

6. Колоколов, А. Анализ данных и виды диаграмм: как выбрать визуализацию / А. Колоколов. – URL: https://alexkolokolov.com/ru/blog/kak-vybrat-diagrammu-bazovaya-vizualizaciya-i-vidy-analiza (дата обращения: 31.10.2022).

7. Методы статистической обработки медицинских данных : методические рекомендации для ординаторов и аспирантов медицинских учебных заведений, научных работников / сост.: А. Г. Кочетов, О. В. Лянг., В. П. Масенко [и др.]. – М. : РКНПК, 2012. – 42 с.

8. Романова, И. К. Современные методы визуализации многомерных данных: анализ, классификация, реализация, приложения в технических системах / И. К. Романова // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2016. – № 3. – С. 133–167. – DOI: 10.7463/0316.0834876.

9. Рылов, Ю. А. Геометрия как главная проблема фундаментальной физики / Ю. А. Рылов // Метафизика. – 2017. – № 4 (26). – С. 63–67.

10. Статистический ансамбль // Большая российская энциклопедия. – URL: https://old.bigenc.ru/physics/text/4164333 (дата обращения: 10.02.2025).

11. Фролов, А. А. Огранение кристаллов силицидов и германидов при выращивании из расплава / А. А. Фролов // Рост кристаллов. – 1989. – Т. 17. – С. 216–237.

12. Фролов, А. А. Технология интеллектуального образования : монография / А. А. Фролов. – Екатеринбург : Издательство «Раритет», 2014. – 180 с.

13. Черняев, И. А. Анализ динамики значений основных эпидемиологических показателей по туберкулезу в Свердловской области в 2010–2021 гг. / И. А. Черняев, А. И. Цветков, Ю. П. Чугаев, П. Ф. Чернавин // Медицинская наука и образование Урала. – 2024. – Т. 25, № 1 (117). – С. 97–103. – DOI: 10.36361/18148999_2024_25_1_97.

14. Черняев, И. А. Прогнозирование тенденций эпидемической ситуации по туберкулезу с применением имитационной динамической модели / И. А. Черняев, А. И. Цветков, Ю. П. Чугаев, П. Ф. Чернавин //

Уральский медицинский журнал. – 2023. – Т. 22, № 5. – С. 58–65. – DOI: 10.52420/2071-5943-2023-22-5-58-65.

15. Gibbs, J. W. Elementary principles in statistical mechanics, developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics / J. W. Gibbs. – New York, 1902.

R E F E R E N C E S

1. Baroyan, O. V., Rvachev, L. A. (1977). *Matematika i epidemiologiya* [Mathematics and Epidemiology]. Moscow, Znanie. 64 p. URL: https://www.mathedu.ru/text/baroyan_rvachev_matematika_i_epidemiologiya_1977/p28/ (mode of access: 22.11.2022).

2. Voronkov, V. V. (1982). *Teoriya rosta kristallov iz rasplava: posloinyi mekhanizm i formoobrazovanie* [Theory of Crystal Growth from a Melt: Layer-by-layer Mechanism and Shaping]. Dis. … d-ra fiz.-mat. nauk. Moscow. 363 p.

3. Gudimenko, A. I. (2020). Teplovoi potok v odnomernoi polubeskonechnoi garmonicheskoi reshetke s pogloshchayushchei granitsei [Heat Flow in a One-dimensional Semi-infinite Harmonic Lattice with an Absorbing Boundary]. In *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*. Vol. 20. No. 1, pp. 38–51. DOI: 10.47910/FEMJ202004.

4. Emelyanova, Yu. G., Fralenko, V. P. (2018). Metody kognitivno-graficheskogo predstavleniya informatsii dlya effektivnogo monitoringa slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Methods of Cognitive-graphical Presentation of Information and Effective Monitoring of Complex Technical Systems]. In *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya*. Vol. 9. No. 4 (39), pp. 117–158. DOI: 10.25209/2079-3316-2018-9-4-3-117-158.

5. Efimov, I. N., Morozov, E. A., Selivanov, K. M. (2014). *Komp'yuternoe modelirovanie dinamicheskikh sistem* [Computer Modeling of Dynamic Systems]. Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovanii. 134 p.

6. Kolokolov, A. *Analiz dannykh i vidy diagramm: kak vybrat' vizualizatsiyu* [Data Analysis and Chart Types: How to Choose Visualization]. URL: https://alexkolokolov.com/ru/blog/kak-vybrat-diagrammu-bazovaya-vizualizaciya-i-vidy-analiza (mode of access: 31.10.2022).

7. *Metody statisticheskoi obrabotki meditsinskikh dannykh* [Methods of Statistical Processing of Medical Data]. Moscow, RKNPK. 42 p.

8. Romanova, I. K. (2016). Sovremennye metody vizualizatsii mnogomernykh dannykh: analiz, klassifikatsiya, realizatsiya, prilozheniya v tekhnicheskikh sistemakh [Modern Methods of Multidimensional Data Visualization: Analysis, Classification, Implementation, Applications in Technical Systems]. In *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N. E. Baumana*. No. 3, pp. 133–167. DOI: 10.7463/0316.0834876.

9. Rylov, Yu. A. (2017). Geometriya kak glavnaya problema fundamental'noi fiziki [Geometry as the Main Problem of Fundamental Physics]. In *Metafizika*. No. 4 (26), pp. 63–67.

10. Statisticheskii ansambl' [Statistical Ensemble]. In *Bol'shaya rossiiskaya entsiklopediya*. URL: https://old.bigenc.ru/physics/text/4164333 (mode of access: 10.02.2025).

11. Frolov, A. A. (1989). Ogranenie kristallov silitsidov i germanidov pri vyrashchivanii iz rasplava [Crystal Faceting of Silicides and Germanides during Melt Cultivation]. In *Rost kristallov*. Vol. 17, pp. 216–237.

12. Frolov, A. A. (2014). *Tekhnologiya intellektual'nogo obrazovaniya* [Technology of Intellectual Education]. Ekaterinburg, Izdatel'stvo «Raritet». 180 p.

13. Chernyaev, I. A., Tsvetkov, A. I., Chugaev, Yu. P., Chernavin, P. F. (2024). Analiz dinamiki znachenii osnovnykh epidemiologicheskikh pokazatelei po tuberkulezu v Sverdlovskoi oblasti v 2010–2021 gg. [Analysis of the Dynamics of the Main Epidemiological Indicators of Tuberculosis in the Sverdlovsk Region in 2010–2021]. In *Meditsinskaya nauka i obrazovanie Urala*. Vol. 25. No. 1 (117), pp. 97–103. DOI: 10.36361/18148999_2024_25_1_97.

14. Chernyaev, I. A., Tsvetkov, A. I., Chugaev, Yu. P., Chernavin, P. F. (2023). Prognozirovanie tendentsii epidemicheskoi situatsii po tuberkulezu s primeneniem imitatsionnoi dinamicheskoi modeli [Forecasting Trends in the Epidemic Situation of Tuberculosis Using a Dynamic Simulation Model]. In *Ural'skii meditsinskii zhurnal*. Vol. 22. No. 5, pp. 58–65. DOI: 10.52420/2071-5943-2023-22-5-58-65.

15. Gibbs, J. W. (1902). *Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*. New York.